

# REGULACIÓ AUTOMÀTICA 1

MATERIAL DIDÀCTIC  
D'INTRODUCCIÓ A  
L'ASSIGNATURA

# SUMARI

## ↓ Delimitació l'àmbit d'estudi

Exemples de Regulació de Sistemes

- Control en anell obert o en **ANEL·L TANCAT**
- Control **MONOVARIABLE** o multivariable
- Control digital o **ANALÒGIC**

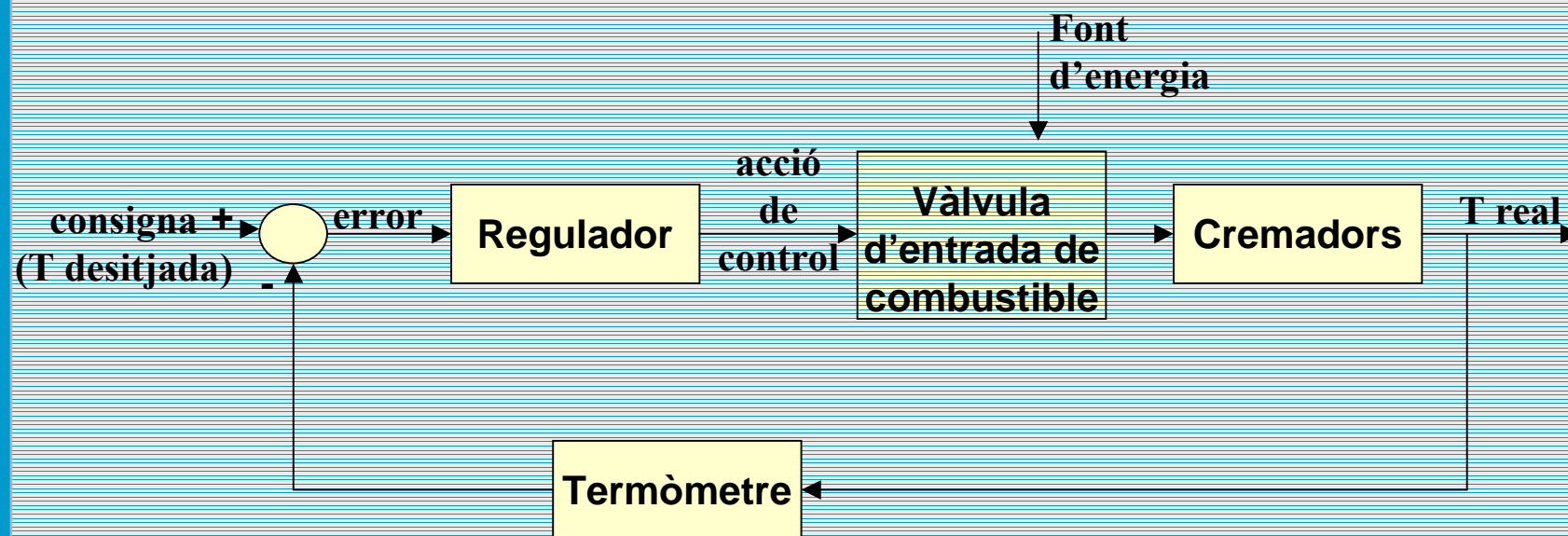
## ↓ Fases de disseny d'un sistema de control realimentat

- Modelització (**SISTEMA LINEAL**)
- Anàlisi de la planta o procés
- Anàlisi de l'anell tancat
- Disseny del controlador

# **Delimitació de l'àmbit d'estudi**

## EXEMPLES DE REGULACIÓ DE SISTEMES

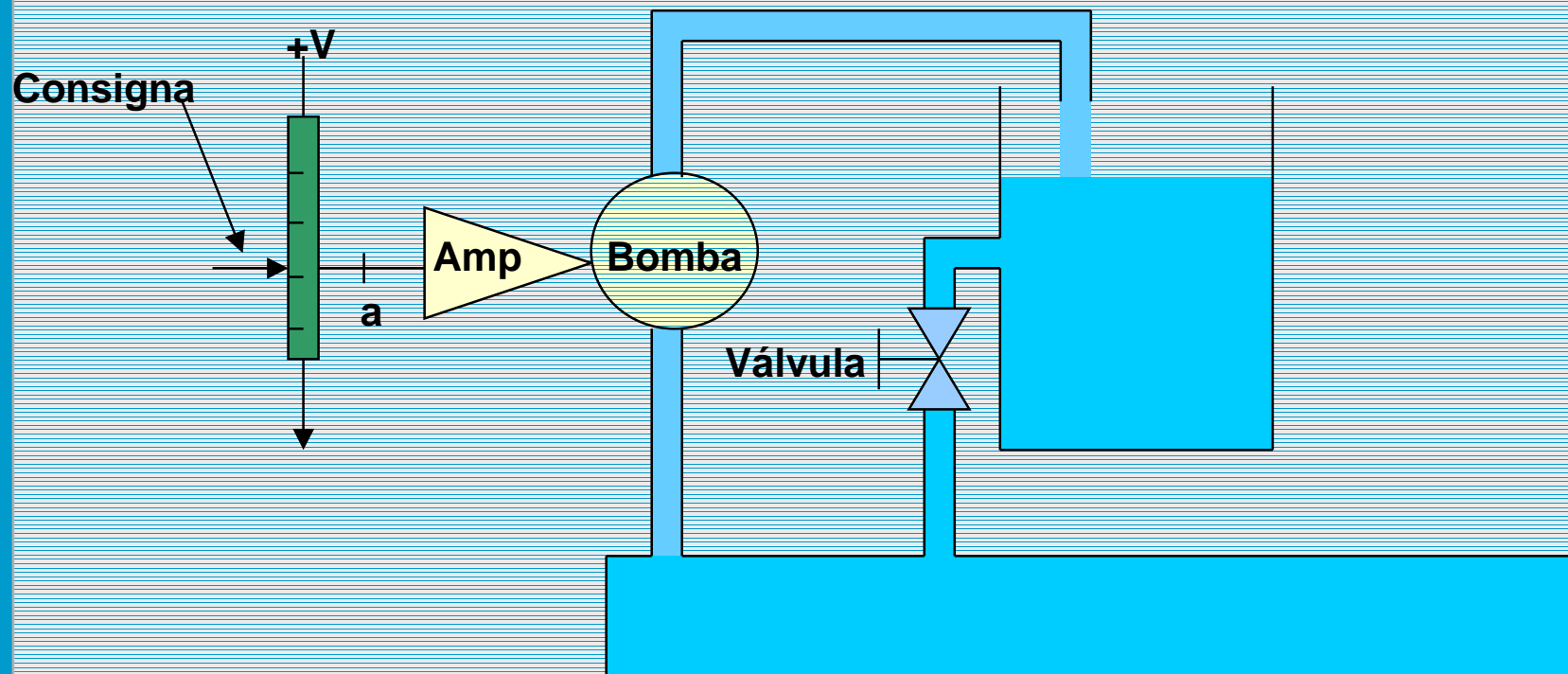
## Sistema de calefacció



# EXEMPLES DE REGULACIÓ DE SISTEMES

## Control de l'alçada de l'aigua a un dipòsit en anell obert

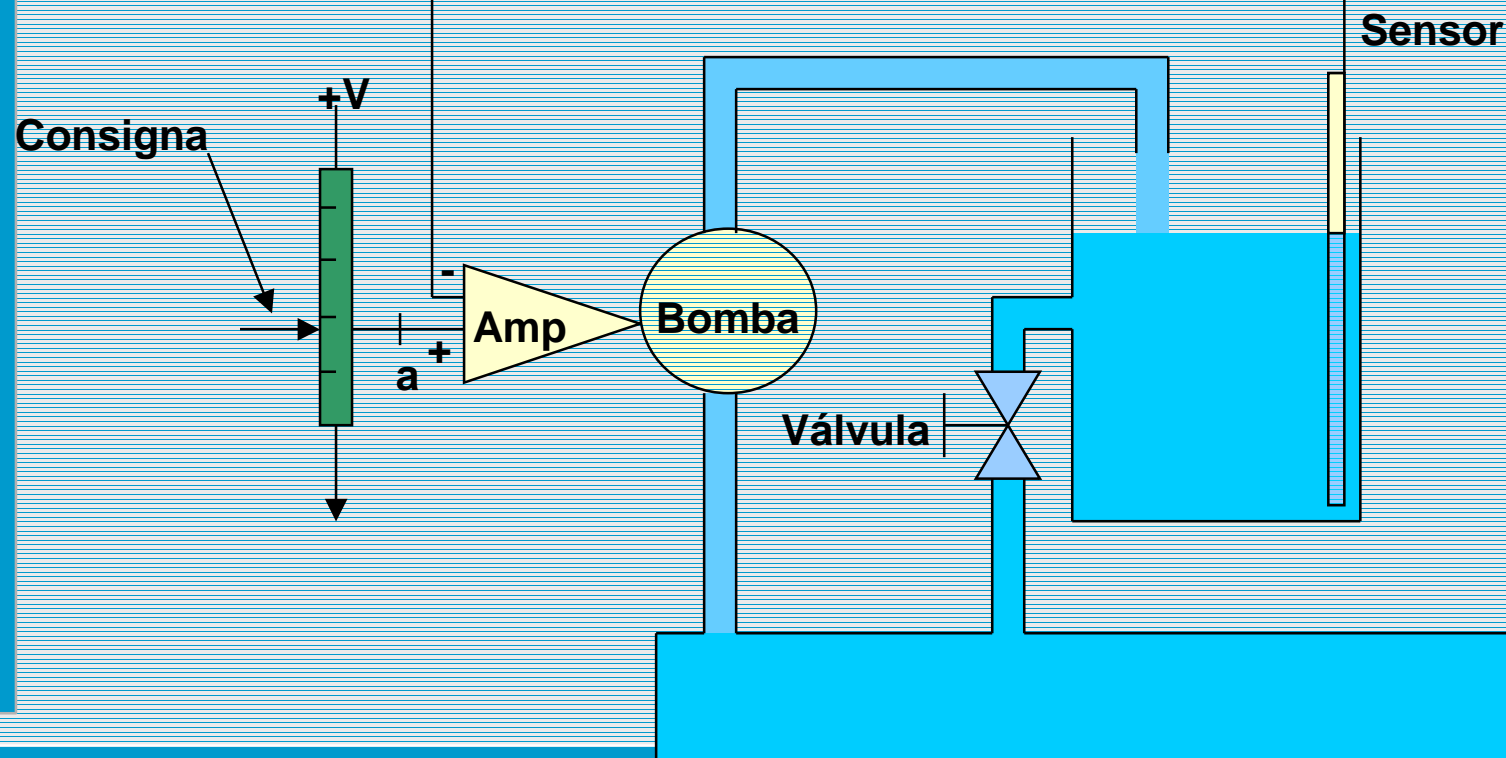
Característiques: poc precís, sensible a canvis en el procés (canonades, bomba) i sensible a pertorbacions (vàlvula)



# EXEMPLES DE REGULACIÓ DE SISTEMES

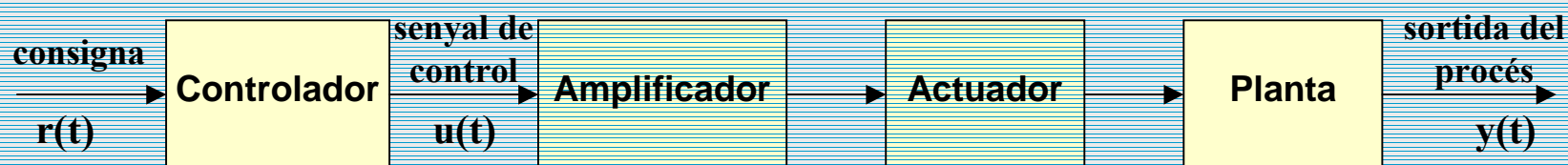
## Control de l'alçada de l'aigua a un dipòsit en anell tancat

Característiques: molt precís, insensible a canvis del procés i a pertorbacions



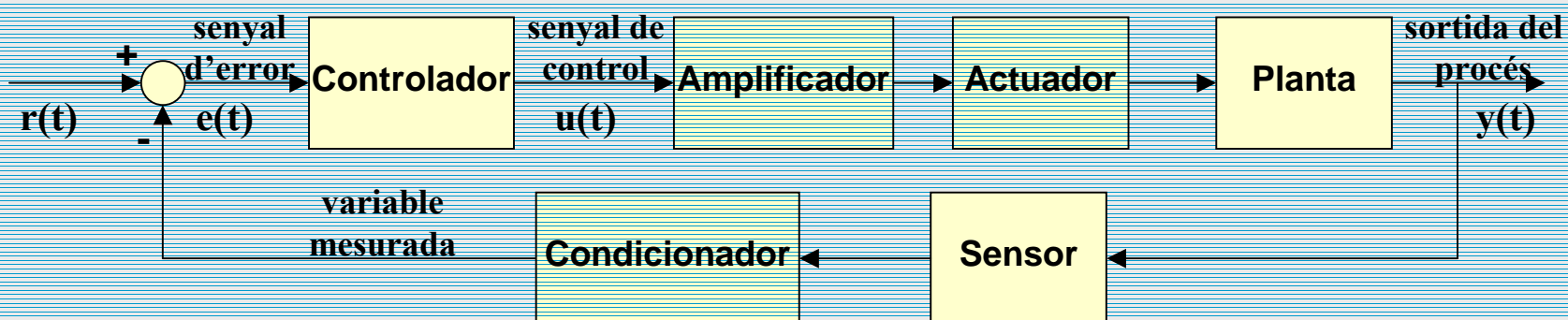
# CONTROL EN ANELL OBERT EN ANELL TANCAT

## Control en anell obert



## Control en anell tancat

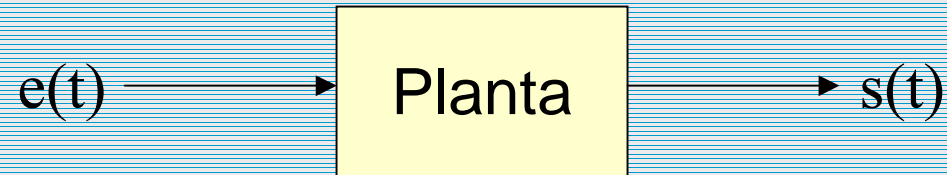
cadena directa o d'acció



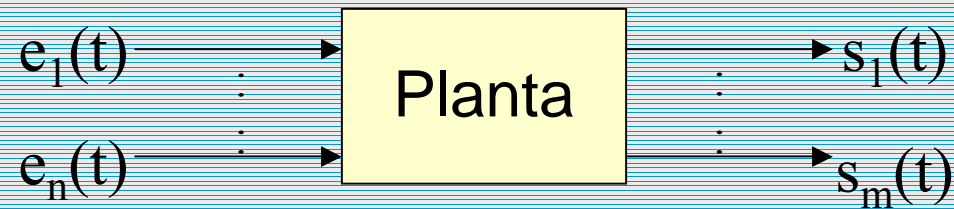
cadena de reacció o de realimentació

# CONTROL MONOVARIABLE MULTIVARIABLE

## Sistema SISO ('single input – single output')



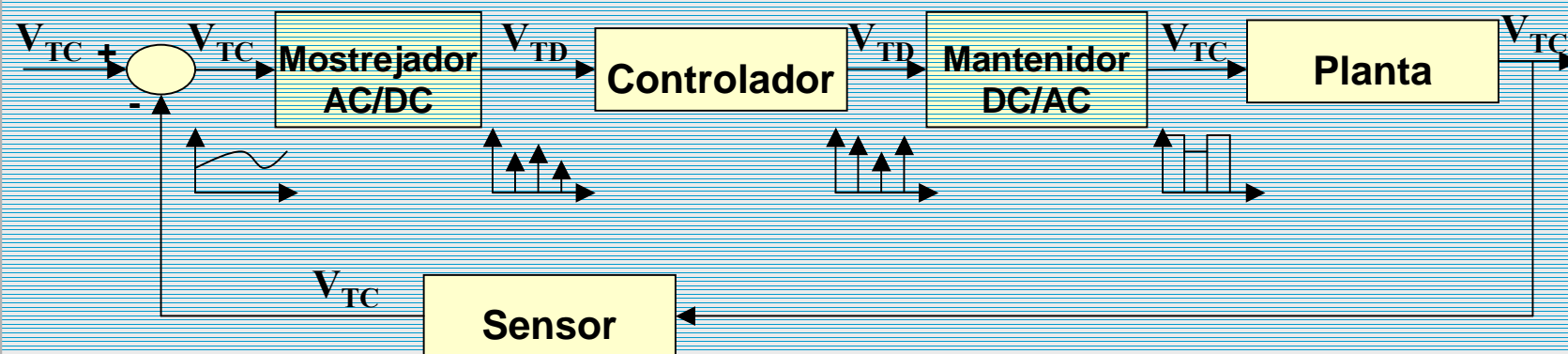
## Sistema MIMO (múltiples entrades i sortides)



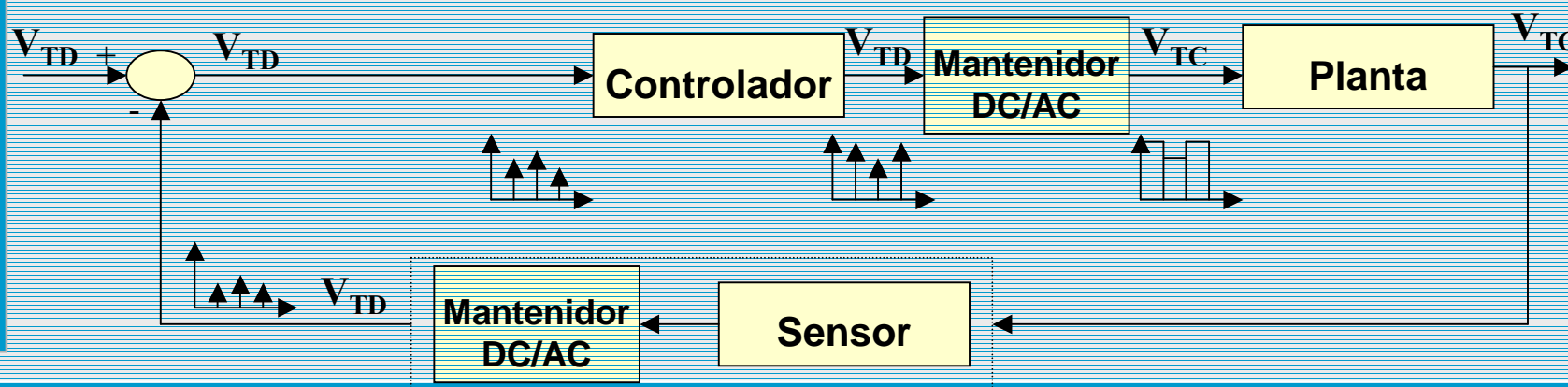


# CONTROL DIGITAL

## Amb consigna i comparador analògics



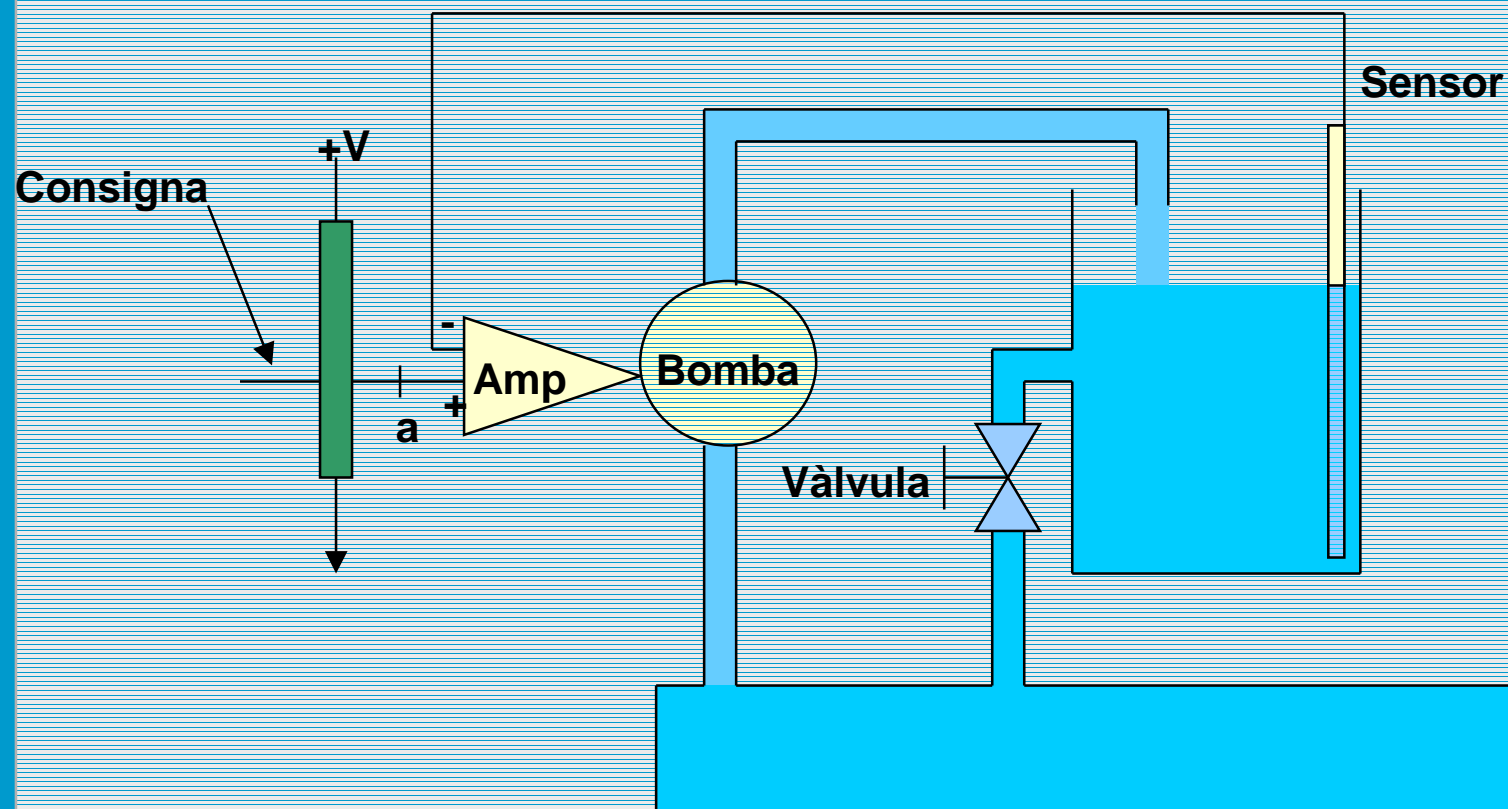
## Amb consigna i comparador digitals



# **Fases de disseny d'un sistema de control realimentat**

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . EXEMPLE

**Exemple a utilitzar : controlar l'alçada de l'aigua a un dipòsit**

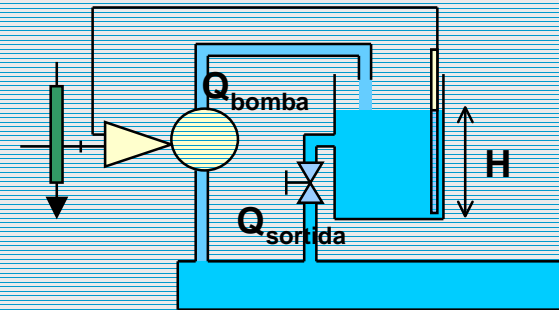


# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ

## MODELITZACIÓ (ANALÍTICA):

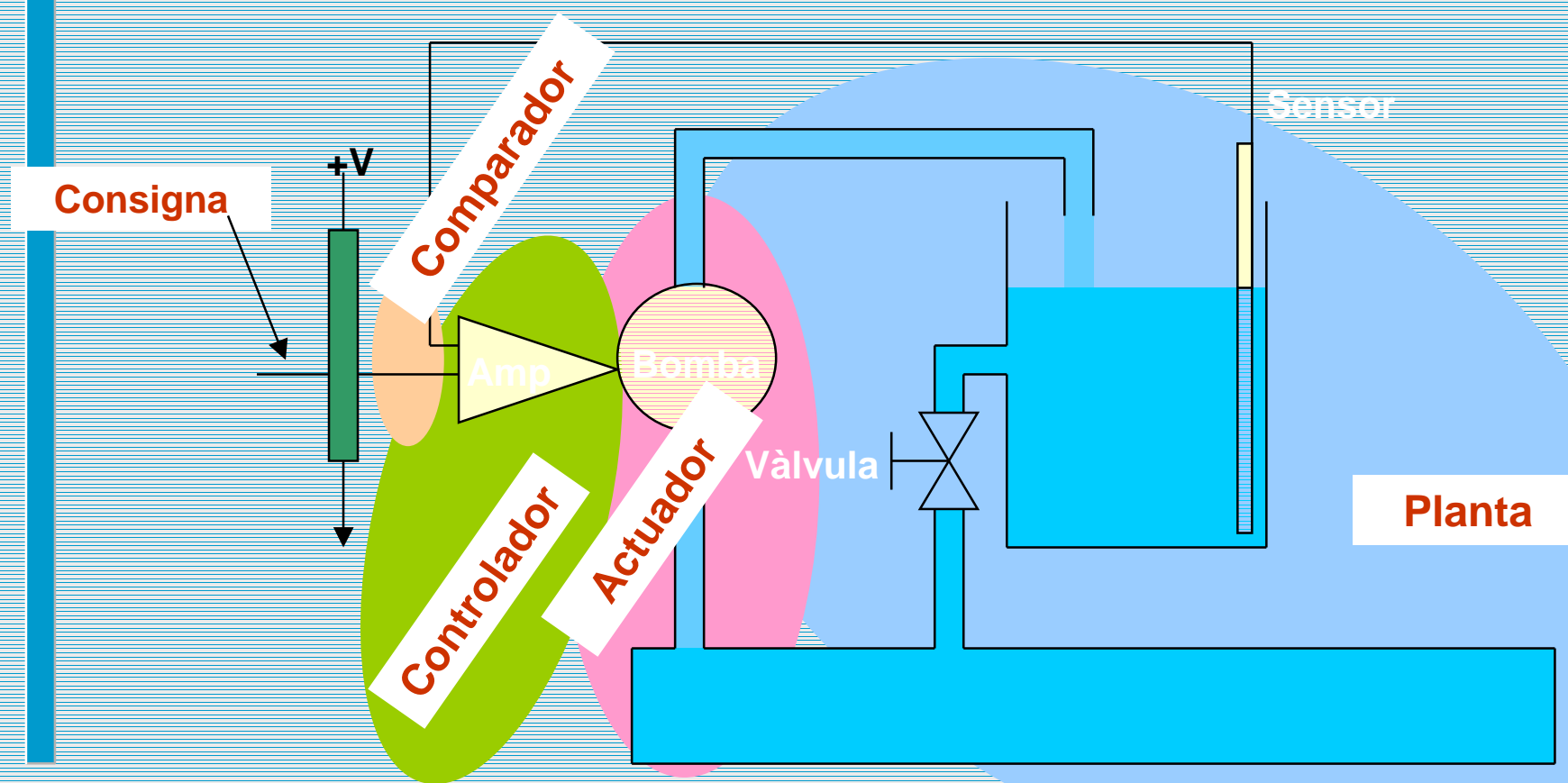
➤ De tot el sistema de control realimentat:

- Identificació dels elements
- Diagrama de blocs



# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ SISTEMA

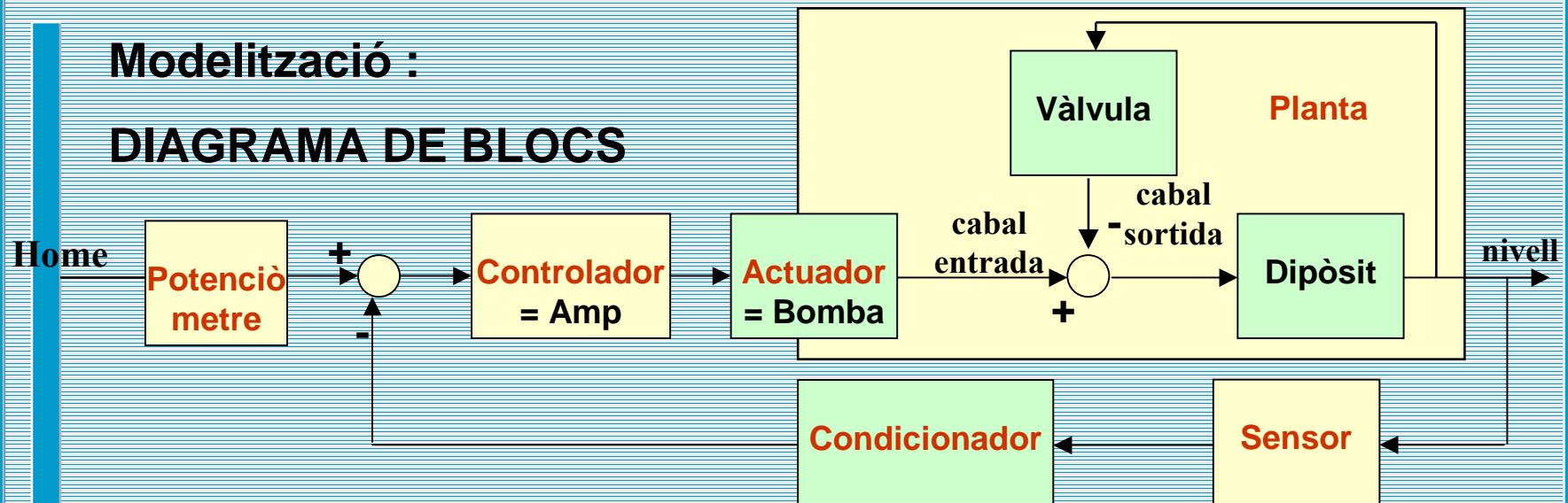
## Modelització : IDENTIFICACIÓ DELS ELEMENTS



# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ SISTEMA

Modelització :

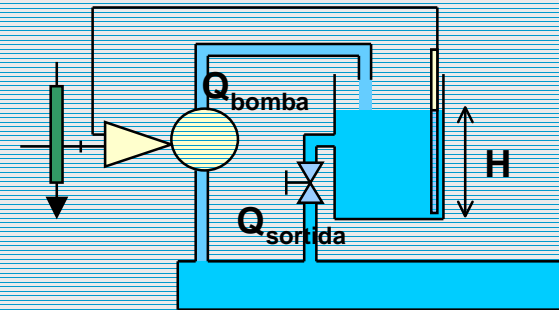
DIAGRAMA DE BLOCS



Consigna = posició del potenciòmetre

Sortida = medició del captador de nivell

Pertorbació = posició de la vàlvula

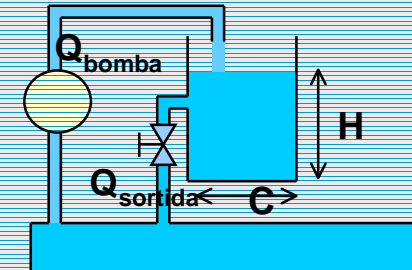


# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

## MODELITZACIÓ (ANALÍTICA):

✧ De la Planta o Procés:

- Obtenció de les e.d.o.'s
- Simulació del model de la planta (No Lineal)
- Linealització de les e.d.o.'s
- Model lineal
- Obtenció de la funció de transferència
  - Per mitjà de fórmules matemàtiques
  - Simplificació de diagrames de blocs



# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

## OBTENCIÓ DE LES e.d.o.'S

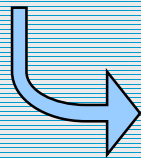
En un  $dt$  :

a) Dipòsit acumula = Vol. Entrada – Vol. Sortida

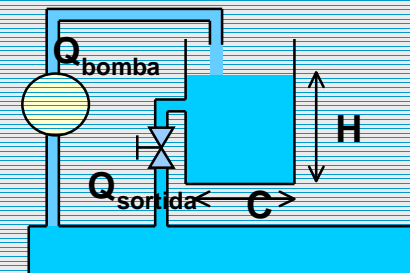
$$C \cdot dH(t) = Q_{\text{bomba}}(t) \cdot dt - Q_{\text{sortida}}(t) \cdot dt$$

b) Cabal sortida = Proporcional a l'arrel de l'alçada

$$Q_{\text{sortida}}(t) = K \cdot \sqrt{H(t)}$$



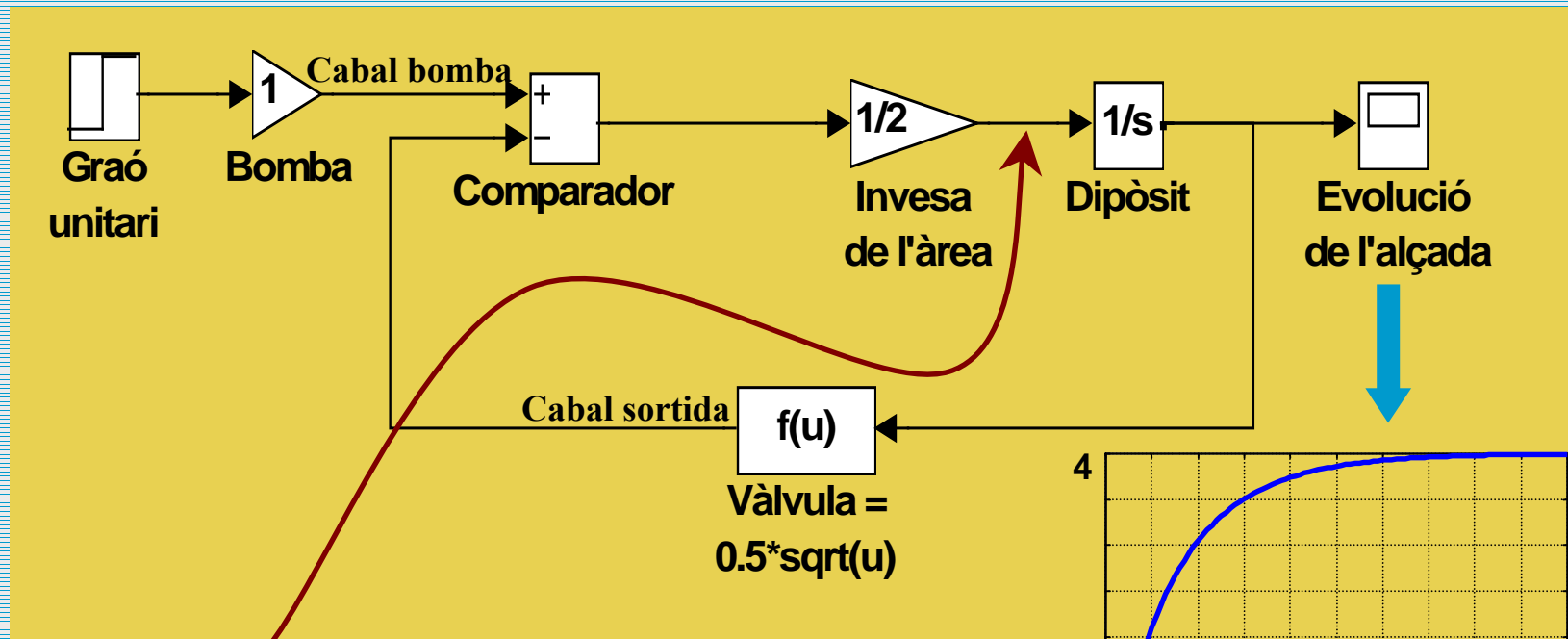
$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{C} \cdot [Q_{\text{bomba}}(t) - K \cdot \sqrt{H(t)}]$$



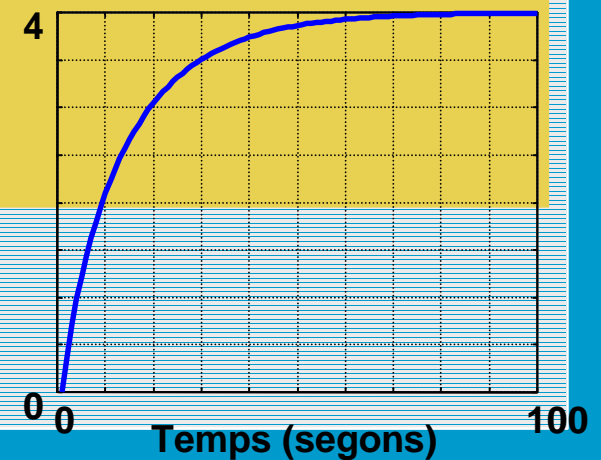


# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

## SIMULACIÓ DEL MODEL (NO LINEAL) DE LA PLANTA



$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{C} \cdot [Q_{\text{bomba}}(t) - K \cdot \sqrt{H(t)}]$$



# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

## LINEALITZACIÓ DE LES e.d.o.'S

Apliquem el desenvolupament de Taylor fins a la primera derivada :

$$\frac{dH}{dt} = f(Q_{\text{bom}}, H) \approx f(\bar{Q}_{\text{bom}}, \bar{H}) + \left. \frac{\partial f}{\partial H} \right|_{\bar{H}} \cdot (H - \bar{H}) + \left. \frac{\partial f}{\partial Q_{\text{bom}}} \right|_{\bar{Q}_{\text{bom}}} \cdot (Q_{\text{bom}} - \bar{Q}_{\text{bom}})$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(H - \bar{H})}{dt} = \frac{dh}{dt} \approx 0 - \frac{Q_{\text{sor}}}{2CH} \cdot h + \frac{1}{C} \cdot q_{\text{bom}}$$

Si es defineix la resistència com:  $R = \frac{2\bar{H}}{Q_{\text{sor}}}$

Aleshores, obtenim:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot h = \frac{1}{C} \cdot q_{\text{bom}}$$

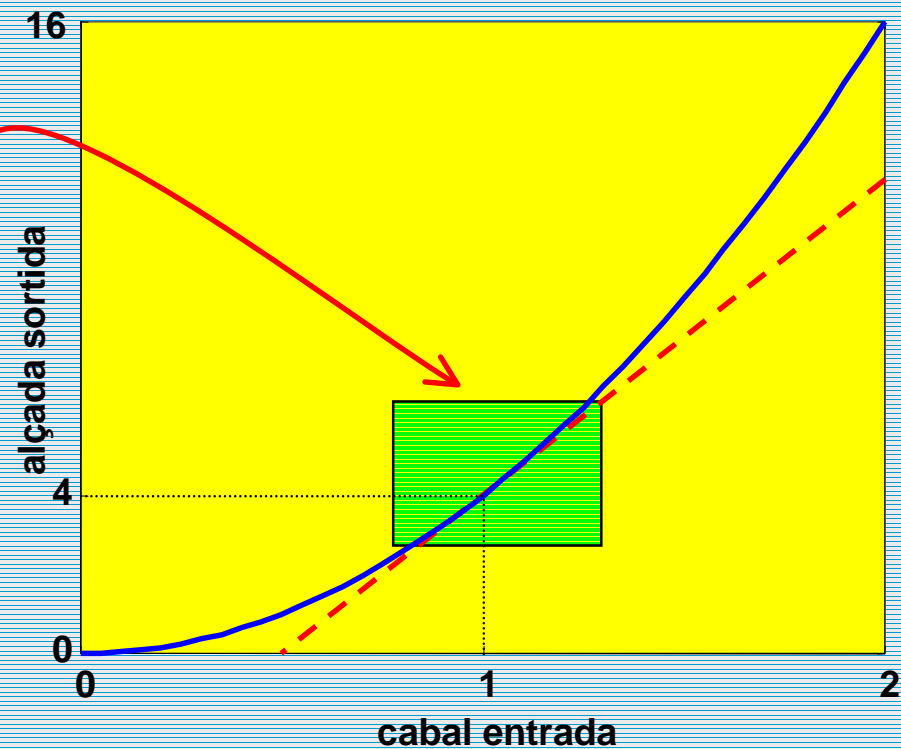
# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

## LINEALITZACIÓ DE LES e.d.o.'S

ZONA DE TREBALL

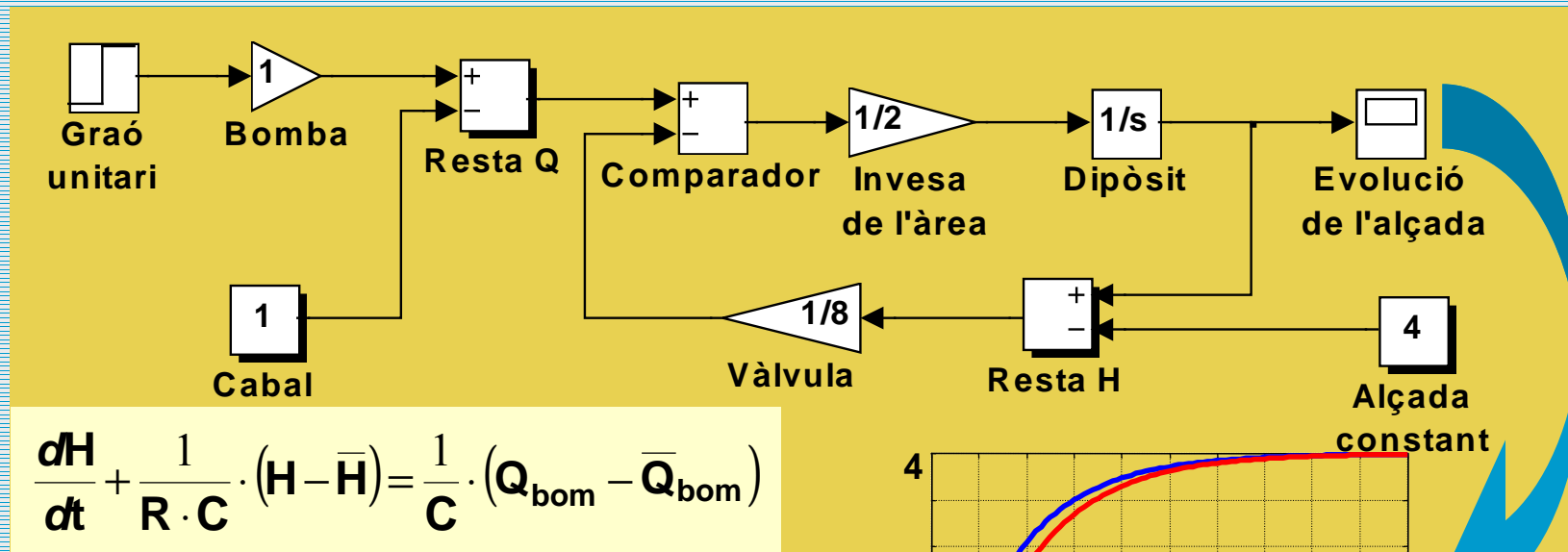
Linealització  
entorn del punt:

$$(\bar{Q}_{\text{bom}}, \bar{H}) = (1, 4)$$

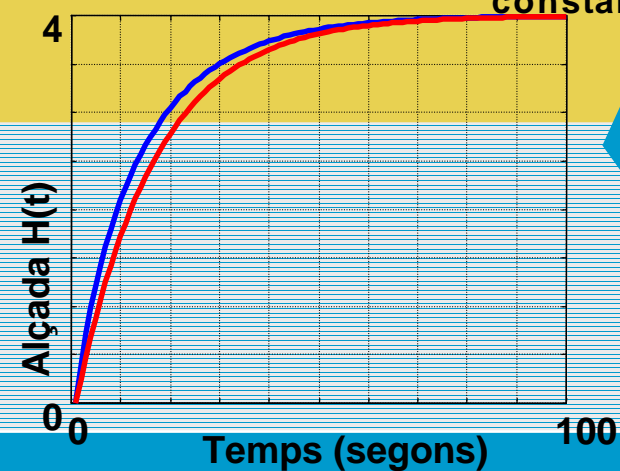


# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

## MODEL LINEAL



$$\frac{dH}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot (H - \bar{H}) = \frac{1}{C} \cdot (Q_{\text{bom}} - \bar{Q}_{\text{bom}})$$



# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

## OBTENCIÓ DE LA FUNCIÓ DE TRANSFERÈNCIA : Fórmules

edo

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot h(t) = \frac{1}{C} \cdot q_{bom}(t)$$

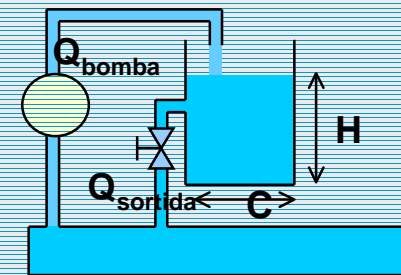


polinomi

$$H(s) \cdot s + \frac{1}{R \cdot C} \cdot H(s) = \frac{1}{C} \cdot Q_{bom}(s)$$



$$H(s) = G(s) \cdot Q_{bom}(s) = \frac{R}{R \cdot C \cdot s + 1} \cdot Q_{bom}(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1} \cdot Q_{bom}(s)$$



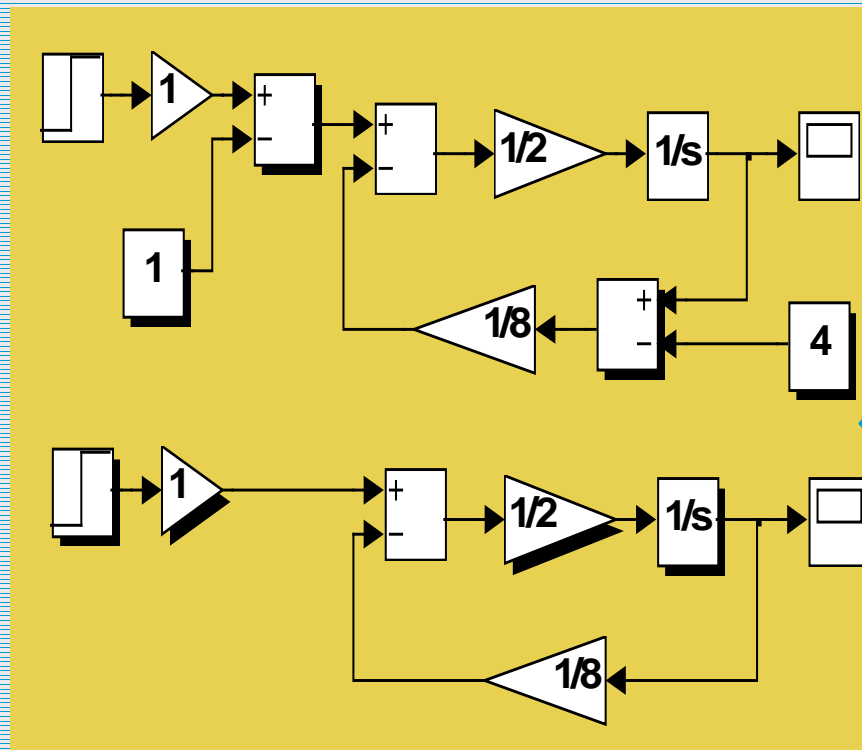
Funció de Transferència  
d'ordre 1

$K$  = Guany en estat estable o  
Guany canònic

$T$  = Constant de temps

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

## OBTENCIÓ DE LA FUNCIÓ DE TRANSFERÈNCIA : Simplificació de Diagrames de blocs [1]



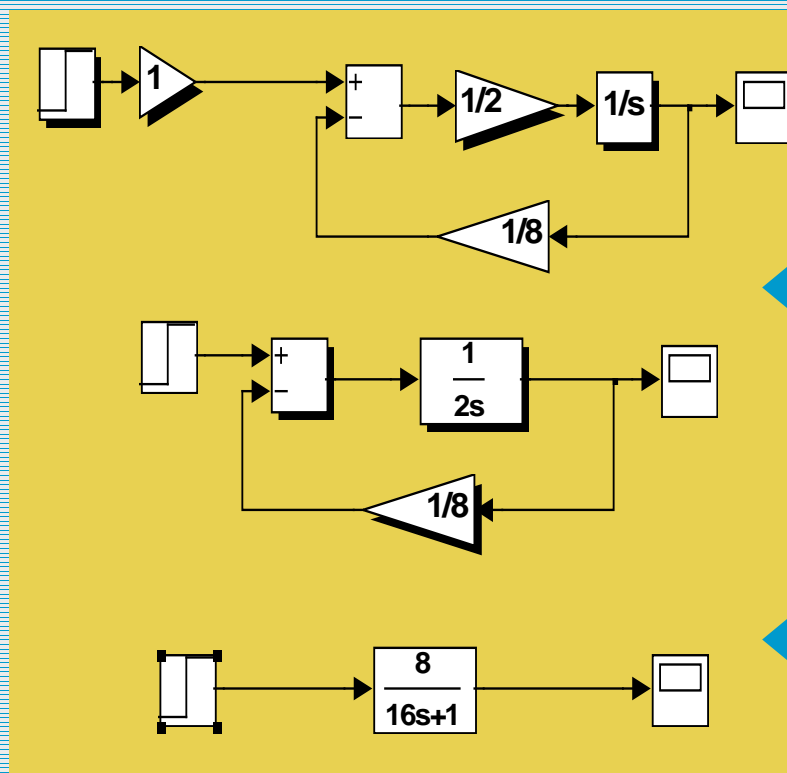
Transformada de Laplace

$$H(s) \stackrel{\text{definició}}{=} L(H(t) - \bar{H})$$

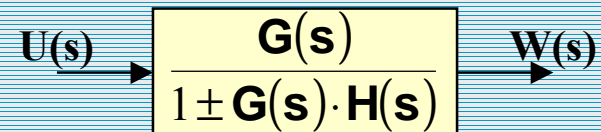
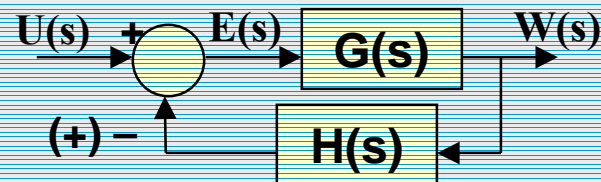
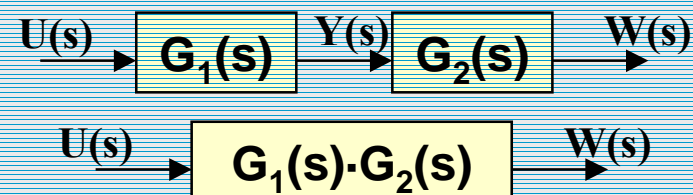
$$Q_{\text{bom}}(s) \stackrel{\text{definició}}{=} L(Q_{\text{bom}}(t) - \bar{Q}_{\text{bom}})$$

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . MODELITZACIÓ PLANTA

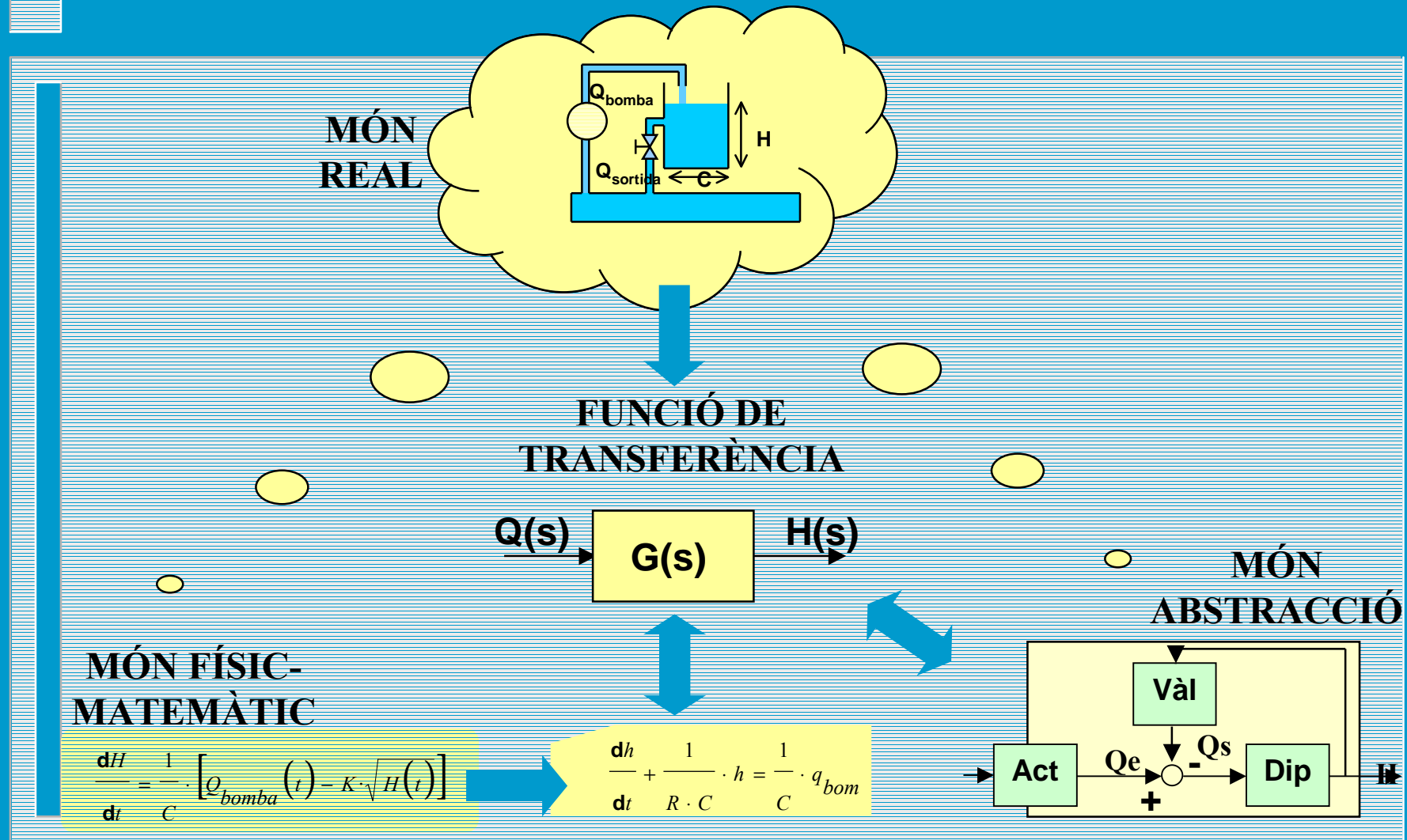
## OBTENCIÓ DE LA FUNCIÓ DE TRANSFERÈNCIA : Simplificació de Diagrames de blocs [2]



### Regles de simplificació



# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ESQUEMA MODELITZACIÓ

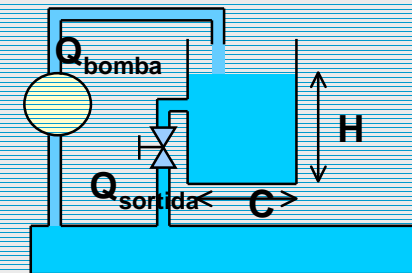




# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI DE LA PLANTA

## ANÀLISI DE LA PLANTA:

- Posició dels pols i zeros
- Resposta Temporal (modelització empírica)
- Resposta Freqüencial



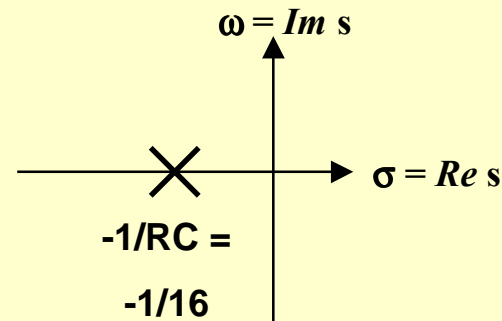
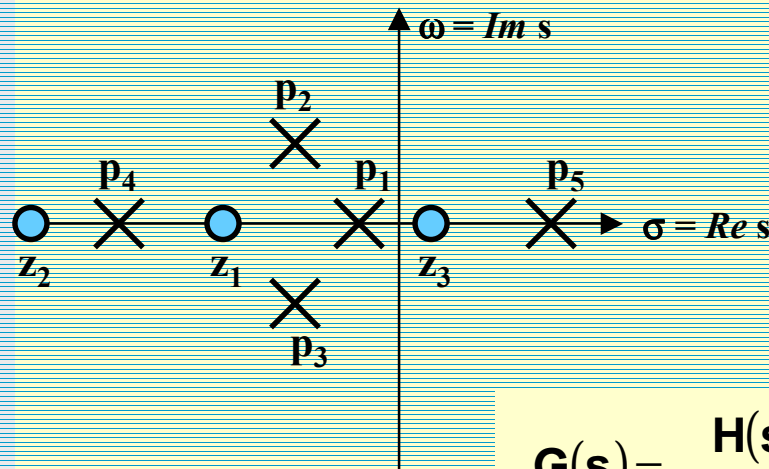
# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI DE LA PLANTA

## POSICIÓ DELS POLS I ZEROS

Representació general d'una funció de transferència:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{K \cdot (s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

**ZEROS**  
**POLS**



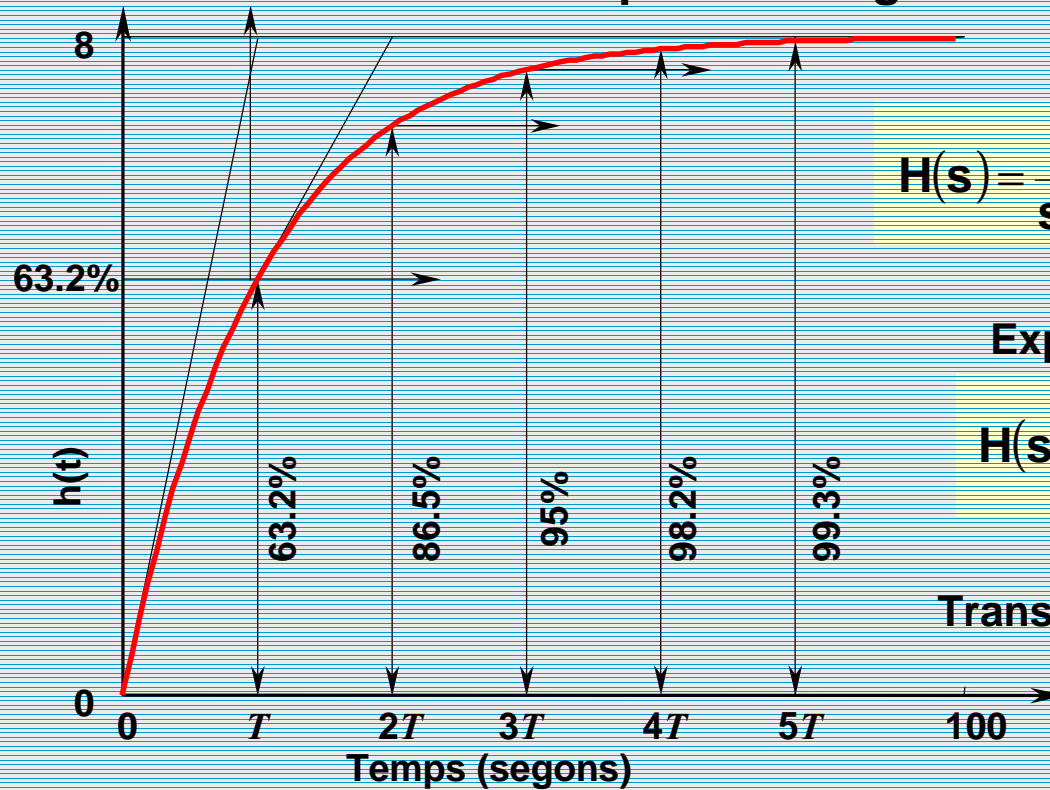
$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_{bom}(s)} = \frac{R}{RCs + 1} = \frac{1/C}{s + 1/RC} = \frac{1/2}{s + 1/16}$$

**cap zero**  
**1 pol**

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI DE LA PLANTA

## RESPOSTA TEMPORAL

Sistemes de 1r ordre. Resposta a un graó unitari.



Resposta a un graó unitari.

$$H(s) = \frac{1/2}{s + 1/16} \cdot Q_{\text{bom}}(s) = \frac{1/2}{s + 1/16} \cdot \frac{1}{s}$$

Expansió en fraccions parcials

$$H(s) = \frac{1/2}{s + 1/16} = 8 \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/16} \right)$$

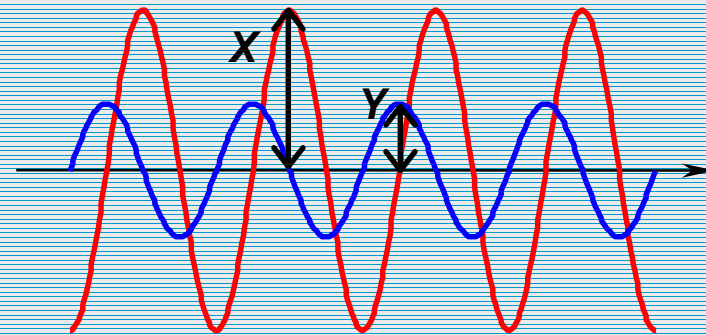
Transformada inversa de Laplace

$$h(t) = 8 \cdot (1 - e^{-16t})$$

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI DE LA PLANTA

## RESPOSTA FREQUÈNCIAL [1]

$$x(t) = X \cdot \sin(\omega t) \xrightarrow[\frac{x(t)}{X(s)}]{} \boxed{G(s)} \xrightarrow[\frac{y(t)}{Y(s)}]{} y(t) = Y \cdot \sin(\omega t + \phi)$$



**Mòdul**  $Y = X \cdot |G(j\omega)| = X \cdot \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right|$

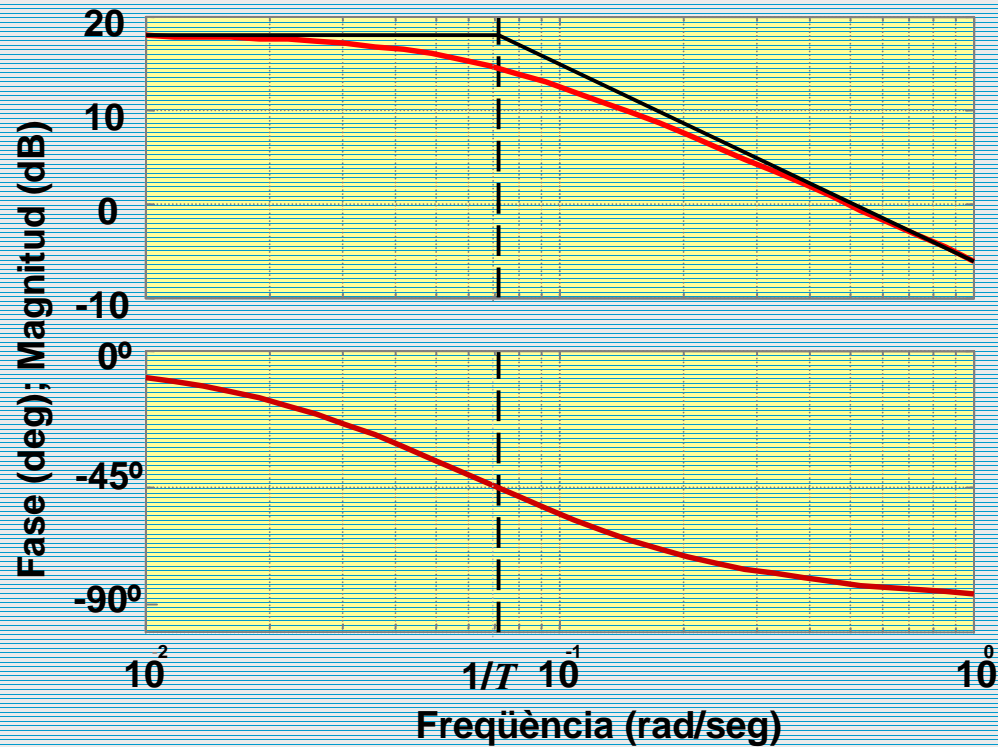
**Magnitud logarítmica**  $M = 20 \cdot \log(|G(j\omega)|)$

**Fase**  $\phi = \arctg\left(\frac{\text{Re}(G(j\omega))}{\text{Im}(G(j\omega))}\right) = \angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI DE LA PLANTA

## RESPOSTA FREQUÈNCIAL [2]

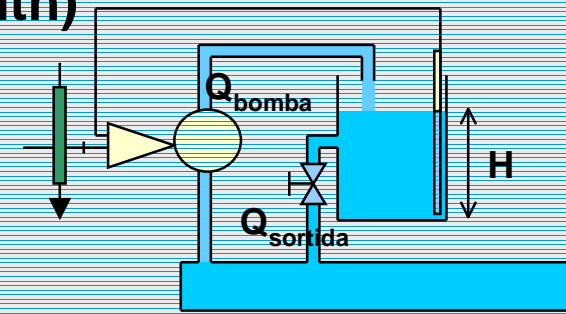
Diagrames Bode



# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI REALIMENTACIÓ

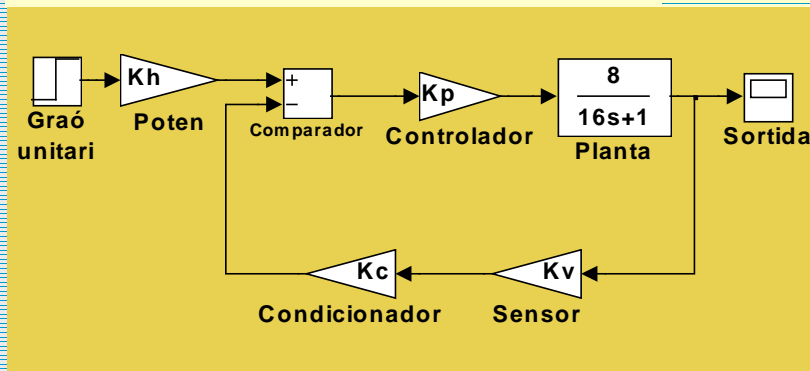
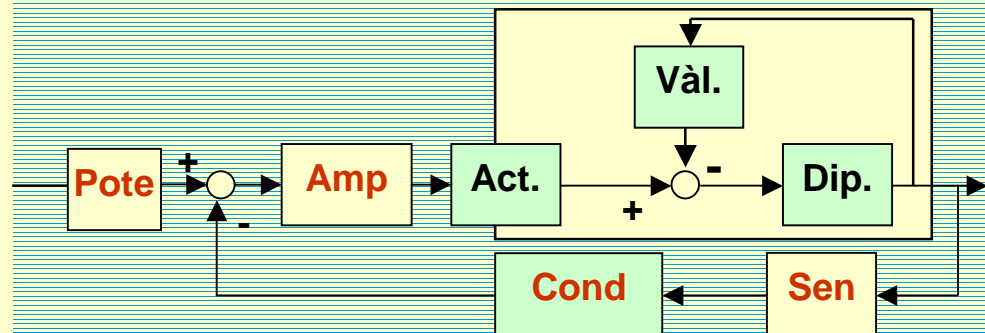
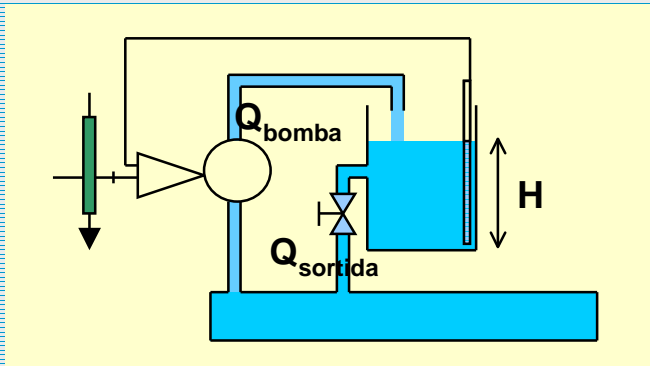
## ANÀLISI DEL SISTEMA REALIMENTAT:

- Obtenció de la funció de transferència
  - Simplificació de diagrames de blocs
- Precisió del sistema realimentat
- Estabilitat del sistema realimentat
  - Anàlisi dels pols del sistema realimentat
  - Anàlisi Temporal (Criteri de Routh)
  - Anàlisi Freqüencial



# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI REALIMENTACIÓ

## OBTENCIÓ DE LA FUNCIÓ DE TRANSFERÈNCIA : Simplificació de Diagrames de blocs



$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_{bom}(s)} = \frac{R \cdot K_p \cdot K_h}{RCs + 1 + R \cdot K_p \cdot K_c \cdot K_v}$$

$$K_h = K_c = K_v = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{8 \cdot K_p}{16s + 1 + 8 \cdot K_p}$$

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI REALIMENTACIÓ

## PRECISIÓ del Sistema Realimentat

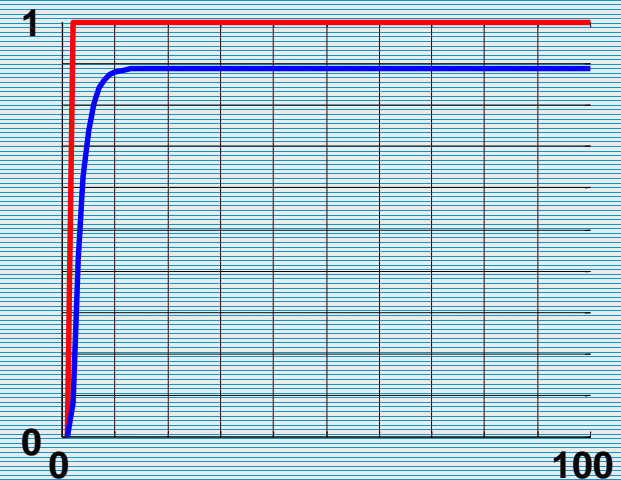
$$\text{error}(t = \infty) = \text{consigna} - \text{sortida}(t = \infty)$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - \text{sortida}(t)) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

$$e_{ss} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{8 \cdot K_p}{16s + 1 + 8 \cdot K_p} \cdot \frac{1}{s} = 1 - \frac{8 \cdot K_p}{1 + 8 \cdot K_p}$$

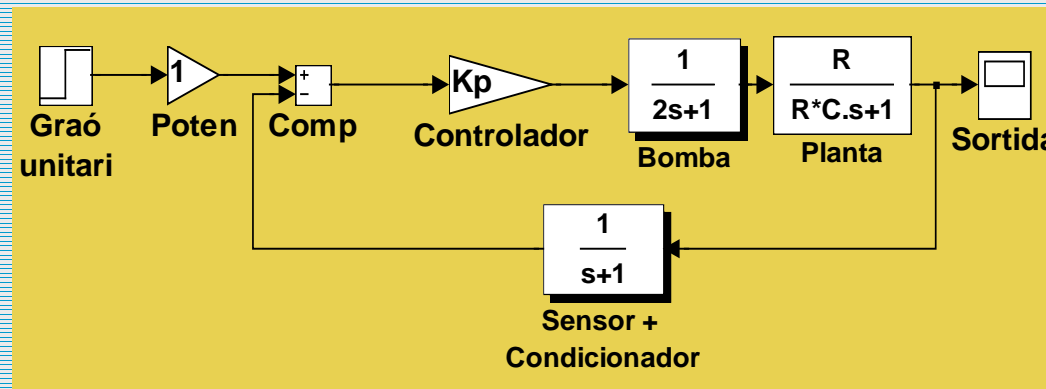
$$\text{Si } K_p = 1 \Rightarrow e_{ss} = 1 - \frac{8}{1+8} = \frac{1}{9} = 11.11\%$$





# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI REALIMENTACIÓ

## ESTABILITAT Sistema Realimentat: VARIACIÓ D'EXEMPLE



$$G_{LLT}(s) = G_{poten}(s) \cdot \frac{G_c(s) \cdot G_b(s) \cdot G_p(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_b(s) \cdot G_p(s) \cdot H_{s+c}(s)}$$

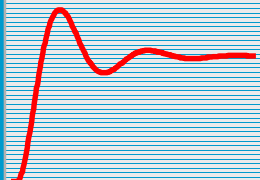
$$G_{LLT}(s) = 1 \cdot \frac{K_p \cdot \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{8}{16s+1}}{1 + K_p \cdot \frac{1}{2s+1} \cdot \frac{8}{16s+1} \cdot \frac{1}{s+1}} = \frac{8K_p \cdot (s+1)}{32s^3 + 50s^2 + 19s + 8K_p + 1}$$

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI REALIMENTACIÓ

## ESTABILITAT Sistema Realimentat: ANÀLISI DELS POLS

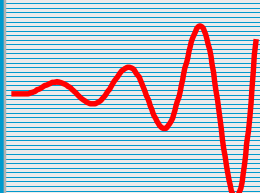
$$\text{den}(s) = 32s^3 + 50s^2 + 19s + 8K_p + 1$$

Si  $K_p = 1$  : Sistema realimentat estable



$$\text{den}(s) = 32s^3 + 50s^2 + 19s + 9 \Rightarrow \text{pols:} \begin{cases} s_1 = -1,2693 \\ s_{2,3} = -0,14661 \pm 0,44731i \end{cases}$$

Si  $K_p = 10$  : Sistema realimentat inestable



$$\text{den}(s) = 32s^3 + 50s^2 + 19s + 81 \Rightarrow \text{pols:} \begin{cases} s_1 = -1,9329 \\ s_{2,3} = +0,18518 \pm 1,1293i \end{cases}$$

Anar provant !!

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI REALIMENTACIÓ

## ESTABILITAT Sistema Realimentat: CRITERI DE ROUTH

$$\text{den}(s) = 32s^3 + 50s^2 + 19s + 8K_p + 1$$

$s^3$	32	19
$s^2$	50	$8K_p + 1$
$s^1$	$\frac{[50 \cdot 19 - 32 \cdot (8K_p + 1)]}{50}$	
$s^0$	$8K_p + 1$	

ESTABILITAT  $\Leftrightarrow$  CAP CANVI DE  
SIGNES A LA PRIMERA COLUMNA

$$\frac{[50 \cdot 19 - 32 \cdot (8K_p + 1)]}{50} > 0 \Leftrightarrow K_p < 3,5859$$

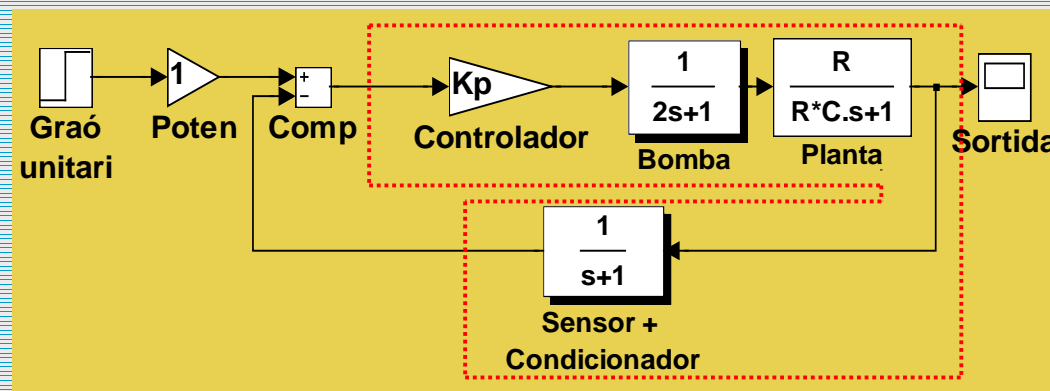
$$8K_p + 1 > 0 \Leftrightarrow K_p > -0,125$$

$$-0,125 < K_p < 3,5859$$

Tot el rang !!

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI REALIMENTACIÓ

## ESTABILITAT Sistema Realimentat: ANÀLISI FREQUÈNCIAL [1]

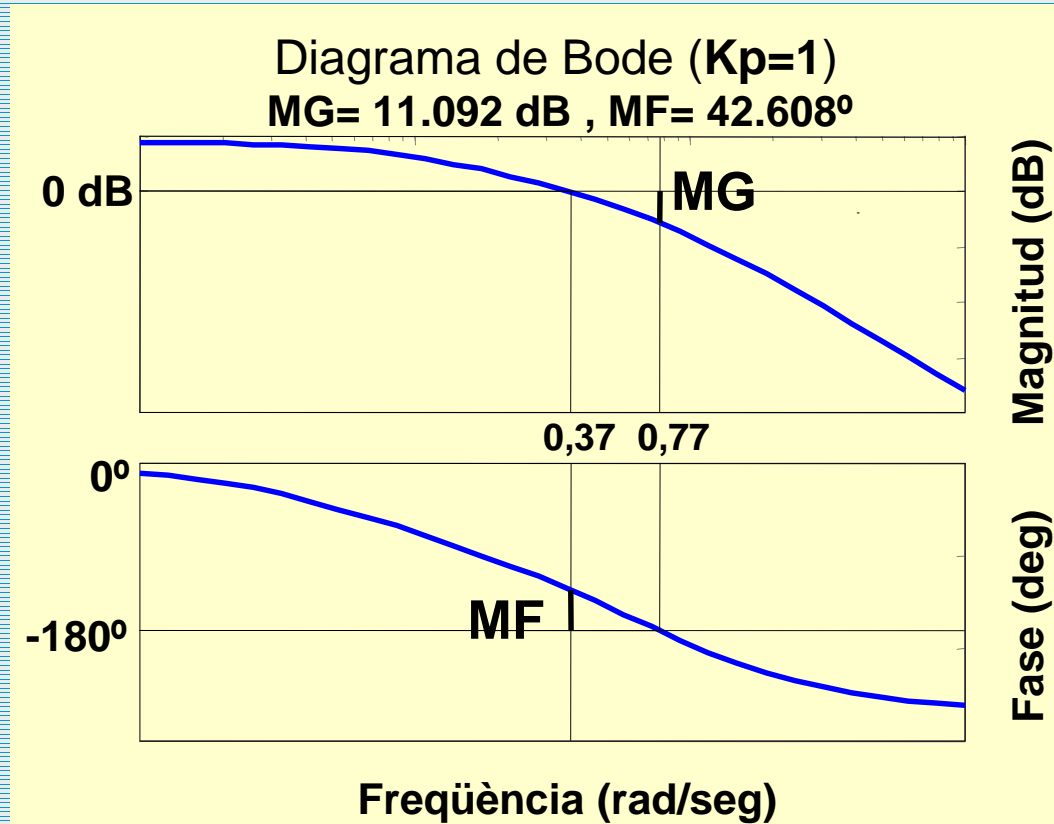


$$GH(s) = G_{LLO}(s) = G_c(s) \cdot G_b(s) \cdot G_p(s) \cdot H_{s+c}(s)$$

**“El sistema realimentat és estable sii la resposta freqüencial del llaç obert té una fase per sobre de  $-180^\circ$  quan el guany és de 0 dB”**

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . ANÀLISI REALIMENTACIÓ

## ESTABILITAT Sistema Realimentat: ANÀLISI FREQUÈNCIAL [2]



$$MG = 20 \cdot \log_{10}(\bar{M})$$

$$\bar{M} = 10^{MG/20} = 3,5859$$



$$K_{p,\text{crítica}} = K_{p,\text{actual}} \cdot 3,5859$$

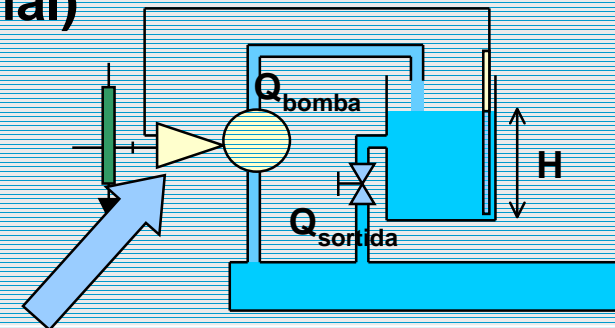
$$K_{p,\text{crítica}} = 3,5859$$

Tot el rang !!

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

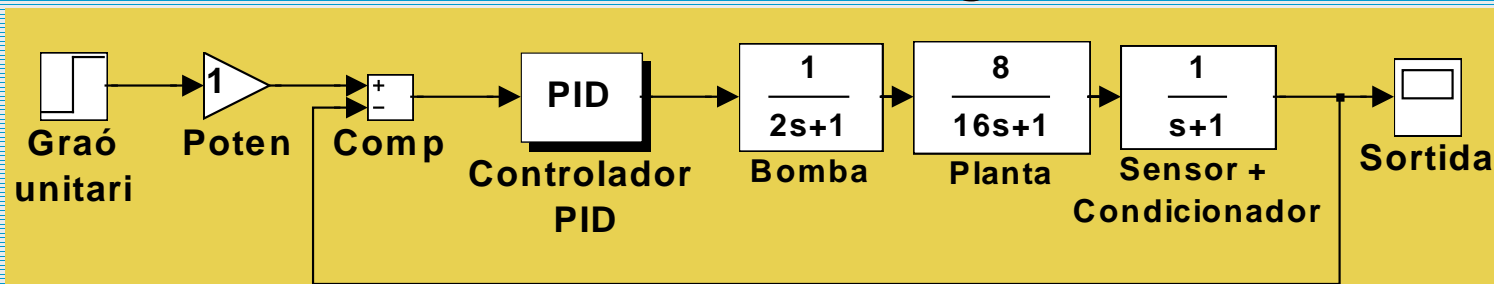
## DISSENY DEL CONTROLADOR:

- Controlador PID
- Disseny experimental o empíric
  - Sintonia de Ziegler-Nichols en anell obert
  - Sintonia de Ziegler-Nichols en anell tancat
- Disseny analític ( Posicionament dels pols )
- Disseny analític ( Mètode freqüencial)



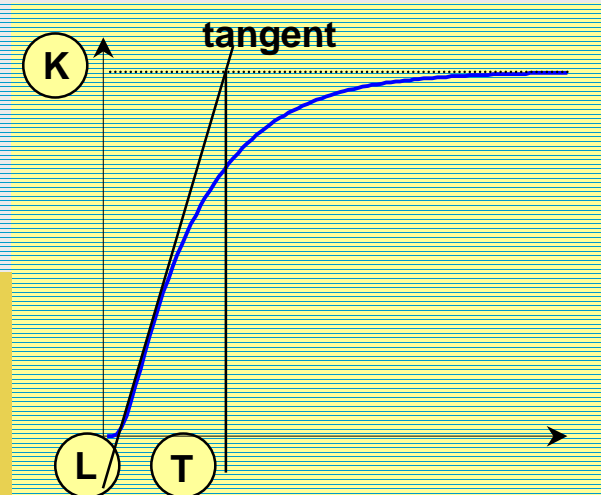
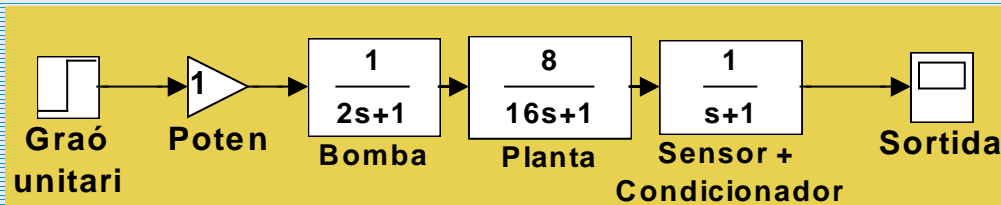
# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

## CONTROLADOR PID : Sintonia de Ziegler-Nichols en anell obert



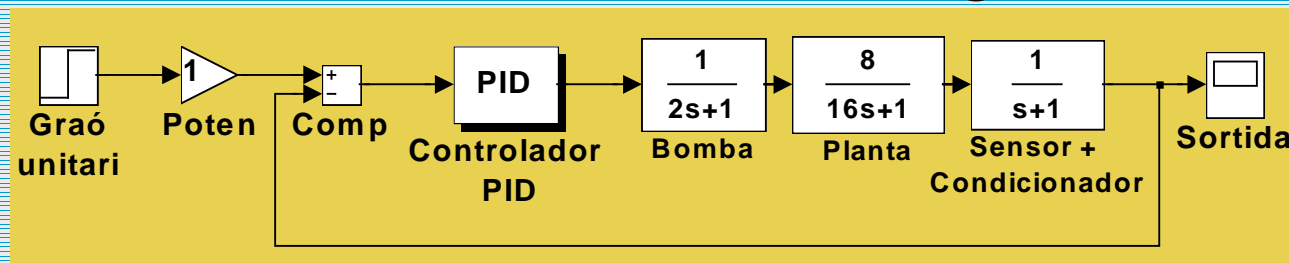
$$G_{PID}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

PAS 1

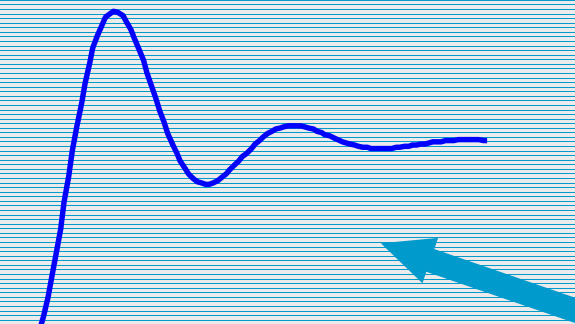


# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

## CONTROLADOR PID : Sintonia de Ziegler-Nichols en anell obert



$$G_{PID}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$



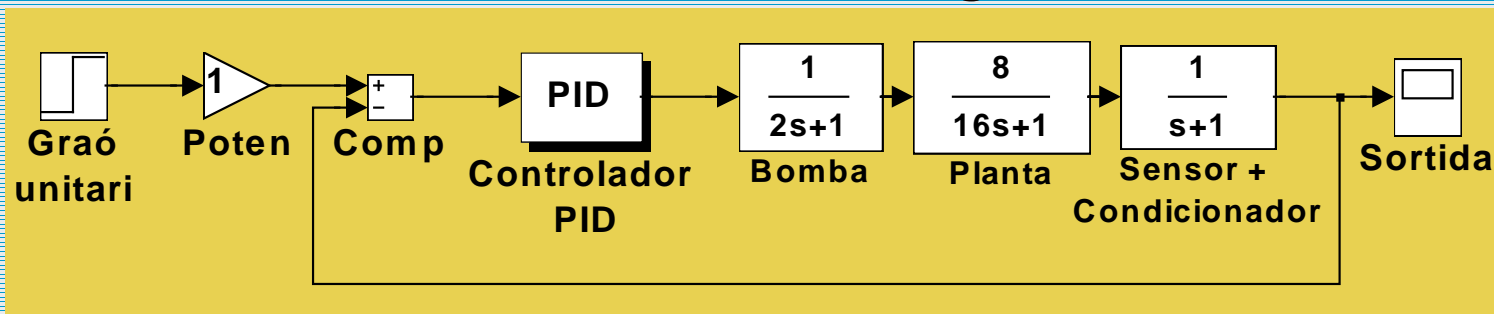
### PAS 2

Tipus de controlador	Kp	Ti	Td
P	T/L		
PI	0,9 · T/L		L/0,3
PID	1,2 · T/L	2 · L	0,5 · L



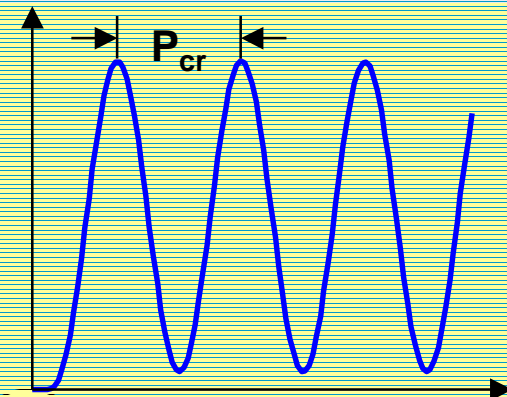
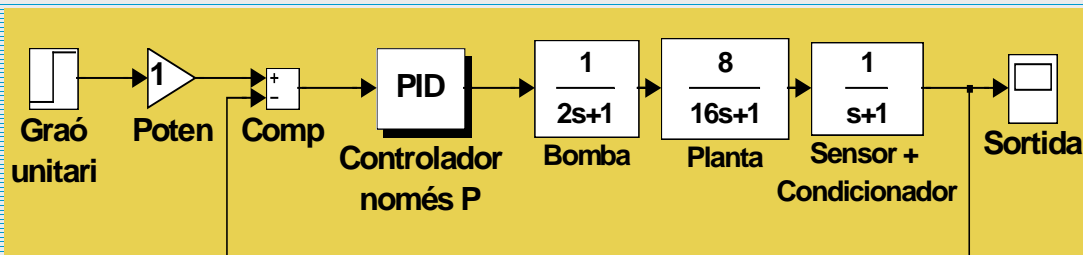
# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

## CONTROLADOR PID : Sintonia de Ziegler-Nichols en anell tancat



$$G_{PID}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

PAS 1

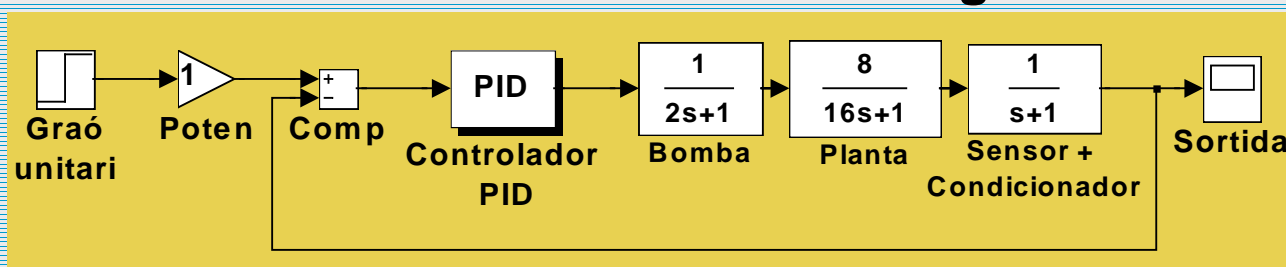


$$K_{cr} = 3,5859$$

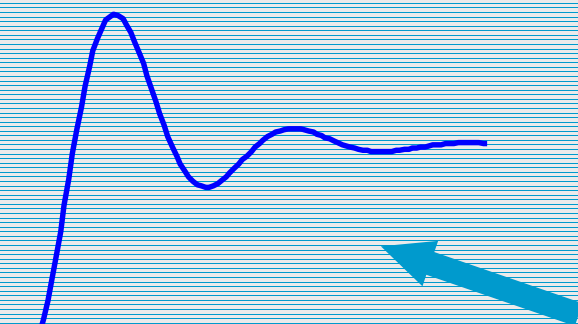
$$P_{cr} = 2 \cdot \pi / 0,77 = 8,16 \text{ s}$$

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

## CONTROLADOR PID : Sintonia de Ziegler-Nichols en anell tancat



$$G_{PID}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

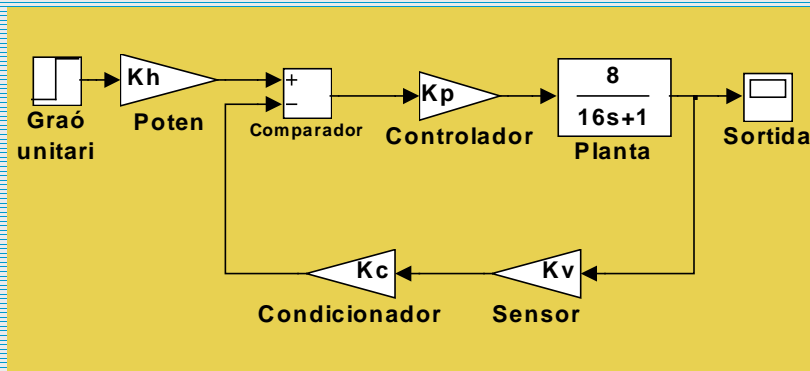


### PAS 2

Tipus de controlador	Kp	Ti	Td
P	0,5·Kcr		
PI	0,45·Kcr	Pcr/1,2	
PID	0,6·Kcr	Pcr/2	Pcr/8

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

## CONTROLADOR P : Sintonia per assignació de pols

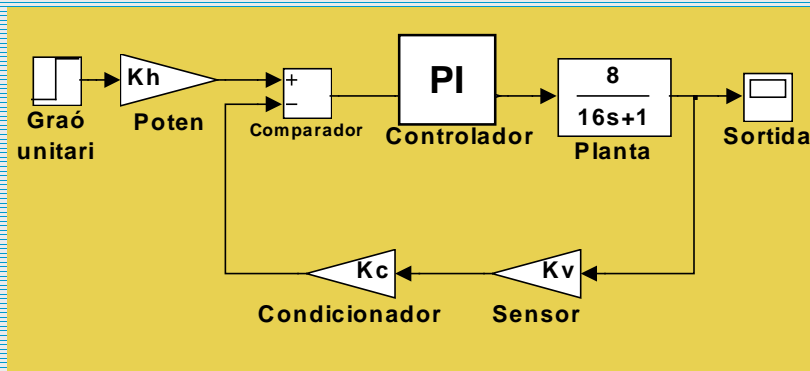


$$G_{PID}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

- A) Quin tipus de controlador tenim al diagrama de blocs: P , PI , PID ?
- B) Quina és la funció de transferència del sistema realimentat?
- C) De quin ordre és el sistema realimentat?
- D) Quins han de ser els paràmetres del controlador per tal de tenir una resposta amb constant de temps  $T < 1$  segon?
- E) Quin error es comet en estat estable o règim permanent?

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

## CONTROLADOR PI : Sintonia per assignació de pols

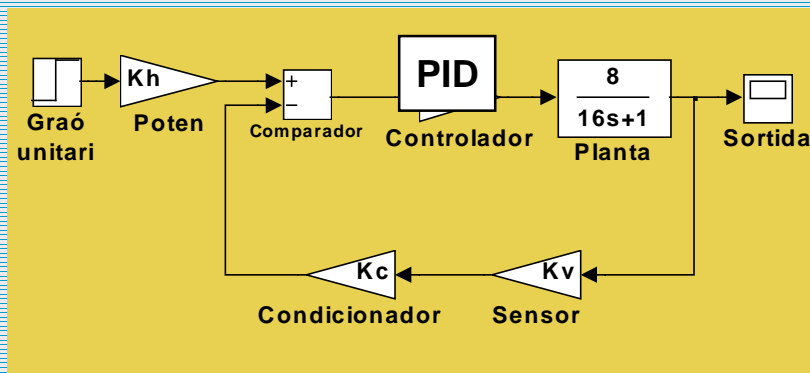


$$G_{PID}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

- A) Quina és la funció de transferència del sistema realimentat, si situem un controlador PI? De quin ordre és el sistema realimentat?
- B) Què caldria per tal de poder modelitzar-ho com ordre 1?
- C) Quins han de ser els paràmetres del controlador per tal de tenir una resposta amb constant de temps  $T < 1$  segon?
- D) Quin error es comet en estat estable o règim permanent?

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

## CONTROLADOR PID : Sintonia per assignació de pols

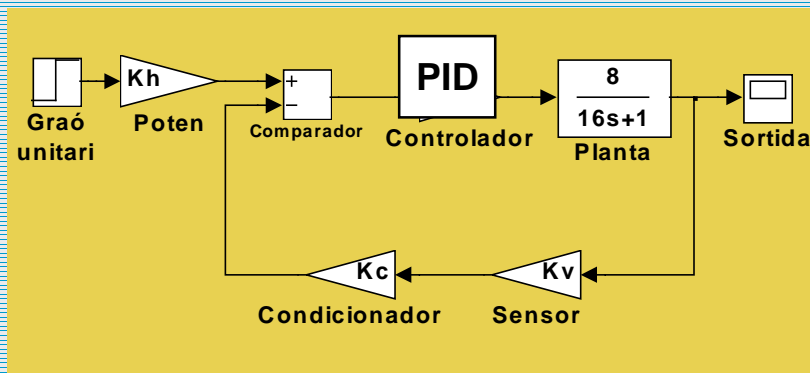


$$G_{PID}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

- A) Quina és la funció de transferència del sistema realimentat, si situem un controlador PID? De quin ordre és el sistema realimentat?
- B) Què caldria per tal de poder modelitzar-ho com ordre 1?
- C) Quins han de ser els paràmetres del controlador per tal de tenir una resposta amb constant de temps  $T < 1$  segon?
- D) Quin error es comet en estat estable o règim permanent?

# FASES DE DISSENY D'UN SISTEMA DE CONTROL REALIMENTAT . DISSENY CONTROLADOR

## CONTROLADOR PID : Sintonia per mètode freqüencial (Phillips)



$$G_{PID}(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

- A) Fixar l'estabilitat del sistema realimentat: marge de fase
- B) Fixar la velocitat de resposta del sistema realimentat: pulsació de tall del sistema en anell obert
- C) Obtenció dels paràmetres del controlador PID per aconseguir aquestes prestacions
- D) Quin error es comet en estat estable o règim permanent?